Ⓖ

数　学　①　数学Ⅰ

(100点
60分)

この問題冊子には，**「数学Ⅰ」「数学Ⅰ・数学A」**の２科目を掲載しています。解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

Ⅰ　注　意　事　項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数　学　Ⅰ	4～11	左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅰ・数学A	12～19	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号（数字及び英字）を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄，試験場コード欄**

氏名・フリガナ及び**試験場コード**（数字）を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，科目の下の ⓪ に**マーク**しなさい。**マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点**となります。

5　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

Ⅱ 解答上の注意

1 解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号（－，±）又は数字（0～9）が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 $\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	●	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨
ウ	⊖	⊕	⓪	①	②	●	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3 分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$ のように答えてはいけません。

4 根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ に $4\sqrt{2}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

5 根号を含む分数形で解答する場合，例えば $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$ と答えるところを，$\dfrac{6+4\sqrt{2}}{4}$ や $\dfrac{6+2\sqrt{8}}{4}$ のように答えてはいけません。

数　学　I

(全　問　必　答)

第1問　(配点　25)

〔1〕 $a = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ とする。a の分母を有理化すると

$$a = \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

となる。

2 次方程式 $6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$$x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \boxed{\text{キ}}$$

である。

次の⓪～③の数のうち最も小さいものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

⓪ $\dfrac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$　　① $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}$

② $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　　③ $\boxed{\text{キ}}$

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

〔２〕 n を整数とし，x の連立不等式

$$\begin{cases} 6x^2-11nx+3n^2 \leqq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ |3x-2n| \geqq 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を考える。

① の左辺は

$$6x^2-11nx+3n^2=\left(\boxed{\text{ケ}}\,x-n\right)\left(\boxed{\text{コ}}\,x-\boxed{\text{サ}}\,n\right)$$

と因数分解される。

$x=1$ が ① を満たすような整数 n の範囲は

$$\boxed{\text{シ}} \leqq n \leqq \boxed{\text{ス}}$$

である。

$x=1$ が ② を満たすような整数 n の範囲は

$$n \leqq \boxed{\text{セ}},\quad \boxed{\text{ソ}} \leqq n$$

である。

よって，$x=1$ が上の連立不等式を満たすとき，$n=\boxed{\text{タ}}$ である。

$n=\boxed{\text{タ}}$ のとき，連立不等式の解は

$$\boxed{\text{チ}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \leqq x \leqq \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

第２問 (配点 25)

a，b を実数とし，x の二つの２次関数

$$y = 3x^2 - 2x - 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$y = x^2 + 2ax + b \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

のグラフをそれぞれ G_1，G_2 とする。

以下では，G_2 の頂点は G_1 上にあるとする。

このとき

$$b = \boxed{\text{ア}}\,a^2 + \boxed{\text{イ}}\,a - \boxed{\text{ウ}}$$

であり，G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$\left(-a,\ \boxed{\text{エ}}\,a^2 + 2a - \boxed{\text{オ}}\right)$$

となる。

(数学Ⅰ第２問は次ページに続く。)

(1) G_2 の頂点の y 座標は，$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき，G_2 の軸は直線 $x = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，G_2 と x 軸との

交点の x 座標は

$$\frac{\boxed{\text{セ}} \pm \boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

(2) G_2 が点 $(0,\ 5)$ を通るとき，$a = \boxed{\text{ツ}}$，$\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

$a = \boxed{\text{ツ}}$ のとき，G_2 を x 軸方向に $\boxed{\text{ニ}}$，y 軸方向にも同じく $\boxed{\text{ニ}}$ だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ は 0 でない数とする。

第3問 (配点 30)

$\triangle ABC$ において，$AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{13}$，$CA=\sqrt{10}$ とする。

このとき

$$\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イウ}}},\qquad \sin\angle BAC=\frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である。また，$\triangle ABC$ の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(1) 円Oを $\triangle ABC$ の外接円とする。円Oの点Aを含まない弧BC上に点Sを $\angle BAS=45^\circ$ となるようにとる。また，円Oの点Bを含まない弧AC上に点Tを $\angle BCT=45^\circ$ となるようにとる。

このとき，$\angle SCT=\boxed{\text{コサ}}^\circ$ であり，$ST=\dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

また，$BT=\dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

(2) △ABC を底面とし P を頂点とする三角錐(すい) PABC を考える。

3 辺 PA, PB, PC が互いに直交しているとき

$$\mathrm{PA}=\boxed{\text{ト}},\quad \mathrm{PB}=\boxed{\text{ナ}},\quad \mathrm{PC}=\boxed{\text{ニ}}$$

である。また，点 P から △ABC に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

第4問 （配点　20）

m，n を自然数とし，$1 < m < n$ とする。

$$\alpha = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}, \quad \beta = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

とおく。さらに

$$S = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

とおく。

(1)　$m = 3$，$n = 6$ のとき

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}, \quad \beta + \frac{1}{\beta} = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$S = \boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

（数学 I 第4問は次ページに続く。）

(2)　$S = 8\sqrt{3}$ ならば，$mn = \boxed{\text{クケ}}$ である。このとき

$$m = \boxed{\text{コ}},\quad n = \boxed{\text{サ}}$$

または

$$m = \boxed{\text{シ}},\quad n = \boxed{\text{ス}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{シ}}$ とする。

(3)　等式

$$\alpha^2\beta^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = 500$$

が成り立つのは，$m = \boxed{\text{セ}}$，$n = \boxed{\text{ソタ}}$ のときである。